6.2) a) $Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$

$B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ B no es simétrica.

Busco A simétrica tq $Q(x) = x^T A x$

$A = \frac{B + B^T}{2} \rightarrow A = \begin{matrix} 9 & -4 \\ -4 & \end{matrix}$

6.2) a) $Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$

$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ simétrica tq $Q(x) = x^T A x$. ✓

Busco autovalores y autovectores de A:

$p(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-9 & 4 \\ 4 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 12\lambda + 11$

Autovalores: $\boxed{\lambda_1 = 11 \quad \lambda_2 = 1}$

Para $\lambda_1 = 11$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \rightarrow 2F1 - F2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $2x + 4y = 0 \rightarrow x = -2y$

$\rightarrow \bar{x} = y \, \boxed{\underbrace{\overset{v_1}{(-2, 1)}}_{\text{AVECT. } \lambda = 11}}$

Para $\lambda = 1$ como A es simétrica tiene un avect. ortogonal a v_1

Tomo $v_2 = \boxed{\underbrace{(1, 2)}_{\text{AVECT } \lambda = 1}}$

Por lo que puedo expresar A como:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}_{P^T}$$

Entonces con esa P, hago cambio de variable

$$x = Py$$

donde $\check{Q}(y) = y^T \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot y$

$$\rightarrow \check{Q}(y) = [y_1 \ y_2] \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [11y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 11y_1^2 + y_2^2$$

$$\rightarrow \boxed{\underbrace{\check{Q}(y) = 11y_1^2 + y_2^2}}$$

Forma cuadrática sin prod. cruzados.

~~b) Q(x) = -5x1^2 - 2x1^2 + 4x1x2 ...~~

c) $Q(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$ simétrica tq $Q(x) = x^T A x$

Busco autovalores y autovectores:

$$p(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda+6 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\lambda^2 + 4\lambda - 21}$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2}$$

Autovalores: $\rightarrow \boxed{\lambda_1 = 3}$, $\rightarrow \boxed{\lambda_2 = -7}$

Para $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F2 \to 3F1 + F2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &x = 3y \\ &\to \bar{x} = y \cdot \underbrace{\overset{v1}{(3,1)}}_{\substack{\text{AVECT.} \\ \lambda = 3}} \end{aligned}$$

Para $\lambda = -7$ como A es simétrica tomo un $v2$ ortogonal a $v1$

Tomo $v2 = (1, -3)$

Por lo que puedo expresar A como

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}}_{P^T}$$

Entonces con esa P, hago cambio de variable

$x = Py$

donde $\boxed{Q(y) = y^T \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \cdot y = 3y_1^2 - 7y_2^2}$

Forma cuadrática sin prod. cruzados.